

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
7 mai 2016  
Profil Tehnic

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## CLASA A IX-A

### 1. Considerăm mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (a-1) \cdot x - a = 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot x^2 - (2a+1) \cdot x + a + 1 = 0\}, a \in \mathbb{R}^*.$$

- Arătați că 1 aparține mulțimilor A și B.
- Determinați mulțimile A și B.
- Să se determine valoarea lui  $a$  știind că  $A \cup B \subset \mathbb{Z}$ .

### 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$ , precum și numerele $u = a^2 - 2a + 3$ și

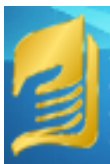
$$v = 1 + 2a - a^2, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

- Reprezentați graficul funcției f.
- Demonstrați că  $v \leq 2 \leq u, (\forall) a \in \mathbb{R}$ .
- Demonstrați că  $\frac{f(u) + f(v)}{2} \leq f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall) a \in \mathbb{R}$ .

### 3. Un triunghi are un unghi obtuz iar lungimile laturilor sunt numere naturale în progresie aritmetică cu rația 2. Determinați perimetrul triunghiului.

### 4. Pentru a termina o lucrare, 5 muncitori au nevoie de 20 de zile. Ei lucrează la lucrare un număr de $n$ zile, $5 \leq n \leq 11$ , după care un muncitor pleacă la o altă lucrare. În câte zile vor termina lucrarea cei 4 muncitori rămași?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

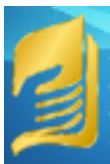
ETAPA NAȚIONALĂ  
7 mai 2016  
Profil Tehnic

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## CLASA A X-A

- Se consideră mulțimea  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 
  - Demonstrați că  $z_1 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $z_2 = \cos t - i \cdot \sin t$  aparțin mulțimii  $M$ , oricare ar fi  $t \in \mathbb{R}$ .
  - Demonstrați că pentru orice  $z_1, z_2 \in M$  și produsul  $z_1 \cdot z_2 \in M$ .
  - Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției "**Dacă**  $z_1 \cdot z_2 \in M$  și  $z_1 \in M$ , **atunci**  $z_2 \in M$ "
- Se consideră dreptele  $(d_m): y = m \cdot x + \sqrt{3} - m, m \in \mathbb{R}$ 
  - Pentru  $m = 1$ , determinați coordonatele simetricului punctului  $O(0,0)$  față de dreapta  $(d_1)$ .
  - Demonstrați că dreptele  $(d_m)$  trec printr-un punct fix.
  - Dacă  $m, n \in \mathbb{R}, m \neq n, OP \perp d_m, OQ \perp d_n$ , să se demonstreze că  $PQ \leq 4$ .
- Se consideră mulțimea  $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 
  - Determinați valoarea lui  $n$  știind că mulțimea  $M_n$  are 21 de submulțimi nevide cu cel mult două elemente.
  - Pentru  $n = 6$ , determinați numărul perechilor  $(A, B)$  formate din mulțimi având două elemente în comun și  $A \cup B = M_6$ .
- Într-o colonie formată din  $n = 2016$  bacterii intră un virus. În primul minut el omoară două bacterii, apoi se divizează în doi noi viruși și concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două bacterii. În minutul următor cei doi viruși omoară câte două bacterii, apoi cei doi viruși și toate bacteriile rămase se divizează din nou în două, și așa mai departe. După cât timp întreaga colonie de bacterii va fi omorâtă? (în ore și minute)

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

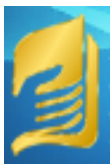
ETAPA NAȚIONALĂ  
7 mai 2016  
Profil Tehnic

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

- Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{2x} + x + \cos x$ 
  - Să se studieze monotonia lui  $f$ .
  - Să se arate că  $f$  este bijectivă.
  - Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{f^{-1}(x)}$ .
- Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x} - 3\ln \sqrt{x}$ .
  - Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă  $x_0 = 4$ .
  - Să se demonstreze că  $x\sqrt{x} \geq 3\ln \sqrt{x} + 1, \forall x > 0$ .
  - Demonstrați că 
$$\frac{1\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + \dots + n\sqrt{n}}{n} \geq 1 + 3\ln \sqrt[2n]{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$
- Dacă  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu  $\det(A) = 504$ , să se determine  $\det(2 \cdot A)$ .
  - Dacă  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\det(A) \neq 0$ , să se demonstreze că  $\det(A^*) = \det(A)$ ;  
 $A^*$  - reprezintă matricea adjunctă asociată matricei  $A$ .
  - Dacă  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\det(A) \neq 0$  și  $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , să se determine matricea  $A$ .
- O firmă de dezăpezire are la dispoziție echipele  $A, B, C$  pentru a interveni la o urgență. Analizând situația s-a constatat ca echipele  $A$  și  $B$  ar remedia situația în 12 ore, echipele  $B$  și  $C$  ar remedia situația în 15 ore, iar echipele  $A$  și  $C$  remedia situația în 20 de ore.
  - În câte ore ar remedia situația cele trei echipe lucrând împreună?
  - Dacă numai o echipă poate fi repartizată acestei lucrări, care este timpul minim în care va fi remediată situația?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ  
7 mai 2016  
Profil Tehnic

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## CLASA A XII-A

- Se consideră polinomul  $f = 2X^3 - 5X^2 + aX - 4$ ,  $f \in \mathbb{C}[X]$  cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ .
  - Arătați că  $2X - 1 \mid f$  dacă și numai dacă  $a = 10$ .
  - Dacă  $a = 10$  descompuneți în factori ireductibili polinomul  $f$ .
  - Determinați numărul real  $a$  astfel încât  $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{127}{16}$ .
- Se consideră inelul matricelor  $(M_2(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$  și submulțimea  $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \hat{a} + \hat{b} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{a} + \hat{c} \end{pmatrix} \mid \det A \neq \hat{0}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_3 \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_3)$ , unde  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  este corpul claselor de resturi modulo 3.
  - Arătați că pentru oricare două matrice  $X, Y \in G \Rightarrow X \cdot Y \in G$ .
  - Determinați elementele mulțimii  $G$ .
  - Arătați că  $(G, \cdot)$  este grup. Este grupul  $(G, \cdot)$  comutativ? Justificați răspunsul.
- Se consideră funcția continuă  $f: [-2, -1] \rightarrow [-4, -3]$ , astfel încât  $\int_{-2}^{-1} f^2(x) dx = \frac{3}{4}$ . Să se demonstreze că:
  - $[f(x) + 4] \cdot [f(x) + 3] \leq 0, (\forall) x \in [-2, -1]$ .
  - $\frac{-49}{4} \leq f^2(x) + 7 \cdot f(x) \leq -12, (\forall) x \in [-2, -1]$ .
  - $28 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x) dx \in [-52, -51]$ .
- Trei tractoare A, B și C ar ara un teren în 7 ore, arând împreună. După ce au arat împreună timp de 5 ore, se defectează tractorul C iar cele două tractoare rămase ar termina de arat restul terenului în 4 ore. După 2 ore de la defectarea tractorului C, tractorul B este folosit la o altă lucrare, rămânând tractorul A care termină de arat terenul încă în 6 ore. În câte ore ar termina de arat terenul fiecare dintre tractoarele A, B, și C dacă ar ara singure?

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.